

Durée : 4 heures

Corrigé du baccalauréat S Nouvelle-Calédonie
novembre 2009

EXERCICE 1

5 points

Commun à tous les candidats

$$f(x) = x^2 e^{-x}.$$

1. a. • On a $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^{-x} = +\infty$, donc $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$.
• On sait que pour $n \in \mathbb{N}$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^n e^{-x} = 0$, donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$.
- b. f est le produit de deux fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ et $f'(x) = 2xe^{-x} - x^2 e^{-x} = e^{-x}(2x - x^2) = e^{-x}x(2 - x)$.
Comme $e^{-x} > 0$, quel que soit $x \in \mathbb{R}$, le signe de $f'(x)$ est celui du trinôme $x(2 - x)$, donc négatif sauf sur $]0; 2[$.
D'où le tableau de variations de f :

x	$-\infty$	0	2	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	+	-
f	$+\infty$	0	$4e^{-2}$	0

- c. Le tableau de variations montre que $f(x) \geq 0$, ce qui est évident d'après l'énoncé ($x^2 \geq 0$ et $e^{-x} > 0$)

2. a. La fonction étant positive sur $\mathbb{R}$:

- si $a < 0$, $I(a) < 0$;
- si $a = 0$, $I(a) = 0$;
- si $a > 0$, $I(a) > 0$.

- b. On pose :

$$\begin{cases} u(x) = x^2 \\ v'(x) = e^{-x} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u'(x) = 2x \\ v(x) = -e^{-x} \end{cases}$$

Toutes les fonctions étant continues, on peut intégrer par parties :

$$I(a) = [-x^2 e^{-x}]_0^a + \int_0^a 2xe^{-x} dx = [-x^2 e^{-x}]_0^a + J(a).$$

Pour calculer l'intégrale $J(a)$ on fait encore une intégration par parties :

$$\begin{cases} u(x) = 2x \\ v'(x) = e^{-x} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u'(x) = 2 \\ v(x) = -e^{-x} \end{cases}$$

$$\text{Donc } J(a) = [-2xe^{-x}]_0^a - \int_0^a -2e^{-x} dx = [-2xe^{-x}]_0^a - [2e^{-x}]_0^a.$$

$$\text{Finalement } I(a) = [-x^2 e^{-x} - 2xe^{-x} + 2e^{-x}]_0^a = e^{-a}(-a^2 - 2a - 2) + 2$$

$$\text{Soit } I(a) = 2 - 2e^{-a} \left(\frac{a^2}{2} + a + 1 \right).$$

- c. En multipliant chaque membre par $\frac{1}{2}e^a$, $I(a) = 2 - 2 \left(\frac{a^2}{2} + a + 1 \right) \Leftrightarrow$

$$\frac{1}{2}e^a I(a) = e^a - \frac{a^2}{2} - a - 1 = e^a - \left(1 + a + \frac{a^2}{2} \right).$$

3. a. Il faut montrer qu'elles ont un point commun (d'abscisse zéro) et la même tangente en ce point.

$$\text{Il faut donc démontrer que } \begin{cases} g(0) = h(0) \\ g'(0) = h'(0) \end{cases}$$

Or $g(0) = 1$ et $h(0) = 1$.

D'autre part $g'(x) = e^x \Rightarrow g'(0) = 1$ et $h'(x) = 1 + x \Rightarrow h'(0) = 1$.

Les deux courbes $\mathcal{C}$ et $\mathcal{D}$ ont la même tangente au point $(0; 1)$.

- b. On a démontré que pour tout $a \in \mathbb{R}$, $\frac{1}{2}e^a I(a) = e^a - \left(1 + a + \frac{a^2}{2}\right)$, ce qui signifie que $\frac{1}{2}e^a I(a) = g(a) - h(a)$.

La différence $g(a) - h(a)$ est du signe de $\frac{1}{2}e^a I(a)$, donc du signe de $I(a)$, qui a été démontré à la question 2. a.

Donc si $a < 0$, $g(a) - h(a) < 0$, qui signifie que $\mathcal{C}$ est sous $\mathcal{D}$;

Si $a = 0$, les deux courbes $\mathcal{C}$ et $\mathcal{D}$ ont le point $(0; 1)$ commun;

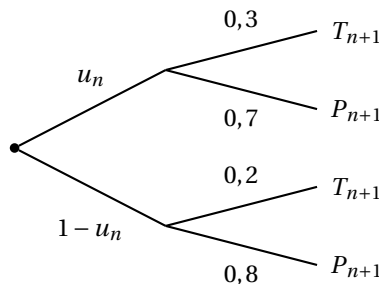
Si $a > 0$, $\mathcal{C}$ est au dessus de $\mathcal{D}$.

EXERCICE 2

5 points

Candidats n'ayant pas choisi l'enseignement de spécialité

1. a. T_1 et P_1 étant équiprobables, $p(T_1) = p(P_1) = 0,5$.
D'après l'énoncé la probabilité de prendre le toboggan après avoir pris le plongeur est égale à $p_{P_1}(T_2) = 1 - 0,8 = 0,2$.
Toujours d'après l'énoncé $p_{T_1}(T_2) = 0,3$.
- b. D'après le principe des probabilités totales :
- $$p(T_2) = p(T_1 \cap T_2) + p(P_1 \cap T_2) = 0,5 \times 0,3 + 0,5 \times 0,2 = 0,15 + 0,1 = 0,25 = \frac{1}{4}.$$
- c. Recopier et compléter l'arbre suivant :



- d. Toujours d'après le principe des probabilités totales :
- $$u_{n+1} = p(T_{n+1}) = p(T_n \cap T_{n+1}) + p(P_n \cap T_{n+1}) = u_n \times 0,3 + (1 - u_n) \times 0,2 = 0,3u_n + 0,2 - 0,2u_n = 0,1u_n + 0,2.$$
- e. La calculatrice donne $u_1 = 0,5$; $u_2 = 0,25$; $u_3 = 0,225$; $u_4 = 0,225$; $u_5 = 0,2225$.
Il semble que u_n ait pour limite $0,222\dots$
2. a. $v_{n+1} = u_{n+1} - \frac{2}{9} = 0,1u_n + 0,2 - \frac{2}{9} = \frac{1}{10}u_n + \frac{1}{5} - \frac{2}{9} = \frac{1}{10}u_n - \frac{1}{45} = \frac{1}{10}\left(u_n - \frac{2}{9}\right) = \frac{1}{10}v_n$.
- La suite (v_n) est donc géométrique de raison $\frac{1}{10}$; son premier terme est
- $$v_1 = u_1 - \frac{2}{9} = \frac{1}{2} - \frac{2}{9} = \frac{5}{18}.$$

- b. On sait que $v_n = v_1 \left(\frac{1}{10}\right)^{n-1} = \frac{5}{18} \left(\frac{1}{10}\right)^{n-1}$.
Comme $u_n = v_n + \frac{2}{9}$, on a $u_n = \frac{2}{9} + \frac{5}{18} \left(\frac{1}{10}\right)^{n-1}$.
- c. Comme $0 < \frac{1}{10} < 1$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{10}\right)^{n-1} = 0$, donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \frac{2}{9}$.
Or $\frac{2}{9} = 0,222\dots$ ce qui valide la conjecture faite à la question 1. e.

EXERCICE 2**5 points****Candidats ayant choisi l'enseignement de spécialité**

1. a. Comme $7 = 3 \times 2 + 1 \iff -3 \times 2 + 7 \times 1 = 1$, le couple $(-2 ; 1)$ vérifie l'équation $3u + 7v = 1$. $3 \times (-2) + 7 \times 1 = 1$ donne en multipliant par 10^{2n} , $3 \times (-2 \times 10^{2n}) + 7 \times 10^{2n} = 10^{2n}$.
Le couple $(-2 \times 10^{2n} ; 10^{2n})$ est donc une solution particulière de l'équation (E).
- b.
$$\begin{cases} 3x + 7y = 10^{2n} \\ 3 \times (-2) + 7 \times 1 = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} 3x + 7y = 10^{2n} \\ 3 \times (-2 \times 10^{2n}) + 7 \times 10^{2n} = 10^{2n} \end{cases}$$

 $\Rightarrow$ (par différence) $3(x + 2 \times 10^{2n}) + 7(y - 10^{2n}) = 0 \iff 3(x + 2 \times 10^{2n}) = 7(10^{2n} - y)$ (1).
 3 divise $7(10^{2n} - y)$ et est premier avec 7 : il divise donc $10^{2n} - y$. Il existe donc $k \in \mathbb{Z}$ tel que $10^{2n} - y = 3k \iff y = 10^{2n} - 3k$.
En reportant dans l'égalité (1) : $3(x + 2 \times 10^{2n}) = 7(10^{2n} - 10^{2n} + 3k) \iff x + 2 \times 10^{2n} = 7k \iff x = 7k - 2 \times 10^{2n}$.
2. a. $100 = 7 \times 14 + 2 \iff 100 \equiv 2 \pmod{7}$.
 $(x ; y)$ solution de (G) signifie $3x^2 + 7y^2 = 10^{2n} \iff 3x^2 + 7y^2 = (10^2)^n \iff 3x^2 + 7y^2 = 100^n$.
Or $100 \equiv 2 \pmod{7} \Rightarrow 100^n \equiv 2^n \pmod{7}$.
Donc $3x^2 + 7y^2 \equiv 2^n \pmod{7}$.
Mais $7y^2 \equiv 0 \pmod{7}$, donc finalement $3x^2 \equiv 2^n \pmod{7}$.

b.	Reste de la division euclidienne de x par 7	0	1	2	3	4	5	6
	Reste de la division euclidienne de $3x^2$ par 7.	0	3	5	6	6	5	3

- c. De trois choses l'une :
- $n = 3p, p \in \mathbb{N}$; alors $2^{3p} = (2^3)^p = 8^p$. Or $8 \equiv 1 \pmod{7} \Rightarrow 8^p \equiv 1 \pmod{7}$;
 - $n = 3p + 1$; alors $2^{3p+1} = 2^{3p} \times 2 = 8^p \times 2$. Or $8 \equiv 1 \pmod{7} \Rightarrow 8^p \equiv 1 \pmod{7} \Rightarrow 2^{3p+1} \equiv 2 \pmod{7}$;
 - $n = 3p + 2$; alors $2^{3p+2} = 2^{3p} \times 2^2 = 4 \times 8^p = 4 \times 8^p$. Comme $8^p \equiv 1 \pmod{7}, 4 \times 8^p \equiv 4 \pmod{7}$.

Conclusion : 2^n est congru à 1, 2 ou 4 modulo 7.

On vient de voir que les restes dans la division par 7 de 2^n ne sont pas les mêmes que ceux de la division de $3x^2$ par 7. Donc $3x^2$ et 2^n ne peuvent être congrus modulo 7. D'après le 2. a. il n'y a donc pas de solution pour l'équation (G).

EXERCICE 3**5 points****Commun à tous les candidats**

1. On a $B(1; 0; 0)$ et $C(1; 1; 0)$, donc $I\left(1; \frac{1}{2}; 0\right)$.

$$F(1; 0; 1), \text{ donc } J\left(1; 0; \frac{1}{2}\right).$$

$$H(0; 1; 1), F(1; 0; 1), \text{ donc } K\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}; 1\right).$$

2. On a $\overrightarrow{IK}\left(-\frac{1}{2}; 0; 1\right)$; donc $\vec{n} \cdot \overrightarrow{IK} = -1 + 0 + 1 = 0$: les vecteurs sont orthogonaux;

$$\overrightarrow{IJ}\left(0; -\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right); \text{ donc } \vec{n} \cdot \overrightarrow{IJ} = 0 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 0 : \text{ les vecteurs sont orthogonaux.}$$

Les vecteurs $\overrightarrow{IK}$ et $\overrightarrow{IJ}$ ne sont manifestement pas colinéaires; ils définissent donc le plan (IJK). Le vecteur $\vec{n}$ orthogonal à deux vecteurs non colinéaires du plan (IJK) est donc normal à ce plan.

Une équation du plan (IJK) est donc :

$$M(x; y; z) \in (\text{IJK}) \iff 2x + y + z + d = 0.$$

$$\text{Comme } I \text{ appartient à ce plan on a } I\left(1; \frac{1}{2}; 0\right) \in (\text{IJK}) \iff 2 + \frac{1}{2} + d = 0 \iff d = -\frac{5}{2}. \text{ Donc}$$

$$M(x; y; z) \in (\text{IJK}) \iff 2x + y + z - \frac{5}{2} = 0 \iff 4x + 2y + 2z - 5 = 0.$$

3. a. On calcule $\overrightarrow{DC}(1; 0; 0)$, donc $M(x; y; z) \in (\text{CD}) \iff \overrightarrow{DM} = \alpha \overrightarrow{DC} \iff$
- $$\begin{cases} x-0 = \alpha \times 1 \\ y-1 = \alpha \times 0 \\ z-0 = \alpha \times 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = \alpha \\ y = 1 \\ z = 0 \end{cases} \quad \alpha \in \mathbb{R}.$$

- b. Les coordonnées de R vérifient l'équation de (IJK) et les équations paramétriques de (DC), donc le système :

$$\begin{cases} x = \alpha \\ y = 1 \\ z = 0 \\ 4x + 2y + 2z - 5 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = \alpha \\ y = 1 \\ z = 0 \\ 4\alpha + 2 - 5 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = \alpha \\ y = 1 \\ z = 0 \\ \alpha = \frac{3}{4} \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x = \frac{3}{4} \\ y = 1 \\ z = 0 \\ \alpha = \frac{3}{4} \end{cases} \text{ Donc } R\left(\frac{3}{4}; 1; 0\right).$$

- c. Cf. la figure plus bas.

4. Cf. la figure plus bas.

Section avec la face BCGF : [IJ]

Section avec la face ABCD : [IR]

Pour la section avec EFGH : on utilise la propriété : « si deux plans sont parallèles tout plan sécant à l'un est sécant à l'autre et les droites d'intersection sont parallèles ».

On trace donc la parallèle à la droite (IR) contenant K qui coupe [FE] et [GH] en deux points que l'on joint à J et à R. Le contour de l'intersection est coloriée en bleu.

5. a. Comme $G(1; 1; 1)$, $d(G, (\text{IJK})) = \frac{|4 + 2 + 2 - 5|}{\sqrt{4^2 + 2^2 + 2^2}} = \frac{3}{\sqrt{24}} = \frac{3}{2\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{6}}{4}$.

- b. La sphère $\mathcal{S}$ et le plan (IJK) sont sécants si la distance de G au plan (IJK) est inférieure au rayon de la sphère. Ce rayon est égal à GF.

$$GF^2 = 0^2 + (-1)^2 + 0^2 = 1 \Rightarrow GF = 1.$$

$$\text{Or } \frac{\sqrt{6}}{4} < 1 \text{ (car } 6 < 4^2 \Rightarrow \sqrt{6} < 4).$$

Donc la sphère et le plan sont sécants en un cercle de centre O' et de rayon r tel que, d'après le théorème de Pythagore :

$$GF^2 = GO'^2 + FO'^2 \iff 1^2 = \left(\frac{\sqrt{6}}{4}\right)^2 + r^2 \iff r^2 = 1 - \left(\frac{\sqrt{6}}{4}\right)^2 \iff$$

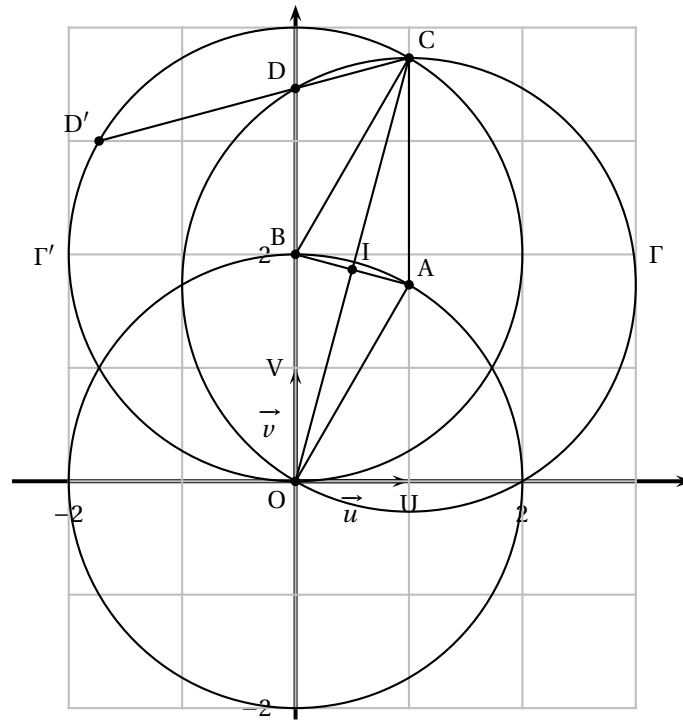
$$r^2 = 1 - \frac{6}{16} = \frac{10}{16} \Rightarrow r = \frac{\sqrt{10}}{4}.$$

EXERCICE 4**5 points****Commun à tous les candidats**

1. a. Calcul du module : $|z_A|^2 = 1^2 + 3 = 4 = 2^2 \Rightarrow |z_A| = 2$.
On peut donc écrire $z_A = 2 \left(\frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2} \right) = 2 \left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} \right) = 2e^{i\frac{\pi}{3}}$.
De façon évidente $z_B = 2i = 2e^{i\frac{\pi}{2}}$.
- b. On obtient A en traçant la perpendiculaire à [OU] contenant U ($U(0; 1)$) et le cercle de centre O et de rayon 2 et B est le symétrique de O autour de V ($V(0; 1)$).
Voir la figure plus bas.
- c. Comme $OA = OB = 2$, le triangle est isocèle ; $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}) = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{6}$, donc le triangle n'est ni équilatéral, ni rectangle.
2. a. $\frac{z_B}{z_A} = \frac{2e^{i\frac{\pi}{2}}}{2e^{i\frac{\pi}{3}}} = e^{i\frac{\pi}{6}}$.
Un argument de $\frac{z_B}{z_A}$ est donc $\frac{\pi}{6}$.
On peut donc en déduire que $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}) = \frac{\pi}{6} \pmod{2\pi}$, cet angle étant celui de la rotation.
- b. La rotation r est donc la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{6}$. Son écriture complexe est donc $z' = ze^{i\frac{\pi}{6}}$.
3. a. L'image de Γ cercle de centre A et passant par O est le cercle de même rayon OA de centre $r(A) = B$ passant par $r'(O) = O$, c'est-à-dire Γ' .
b. On a $z_I = \frac{1}{2} + i \left(1 + \frac{\sqrt{3}}{2} \right)$.
c. C est sur les deux cercles Γ et Γ' de centres respectifs A et B et de rayon 2, donc $CA = CB = 2$.
Or $OA = OB = 2$, donc $OA = AC = CB = BO = 2$: le quadrilatère OACB est un losange.
d. D'après la question précédente les diagonales [AB] et [OC] ont le même milieu ; or le milieu de [AB] est I qui est aussi celui de [OC].
I milieu de [OC] $\iff \overrightarrow{OC} = 2\overrightarrow{OI} \iff z_C = 2z_I = 1 + i(2 + \sqrt{3})$
4. a. Calculons AD : $|z_D - z_A| = |2i\sqrt{3} - 1 - i\sqrt{3}| = |-1 + i\sqrt{3}| = \sqrt{1+3} = 2$. [AD] est bien un rayon de Γ .
b. Comme D appartient à Γ , son image appartient à Γ' et au cercle de centre O et de rayon [OD].
Par définition : $z_{D'} = e^{i\frac{\pi}{6}} \times 2i\sqrt{3} = \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2} \right) \times 2i\sqrt{3} = -\sqrt{3} + 3i$.

5. On a $\overrightarrow{DC} (1; (2 + \sqrt{3}) - 2\sqrt{3})$ ou $\overrightarrow{DC} (1; (2 - \sqrt{3}))$;
 $\overrightarrow{DD'} (-\sqrt{3}; 3 - 2\sqrt{3})$.

Le coefficient de colinéarité ne peut être que $-\sqrt{3}$ et $-\sqrt{3}(2 - \sqrt{3}) = 3 - 2\sqrt{3}$,
 donc on a bien $\overrightarrow{DD'} = -\sqrt{3}\overrightarrow{DC}$, ce qui signifie que les points C, D et D' sont alignés.



ANNEXE

Exercice 3

Commun à tous les candidats

À rendre avec la copie

